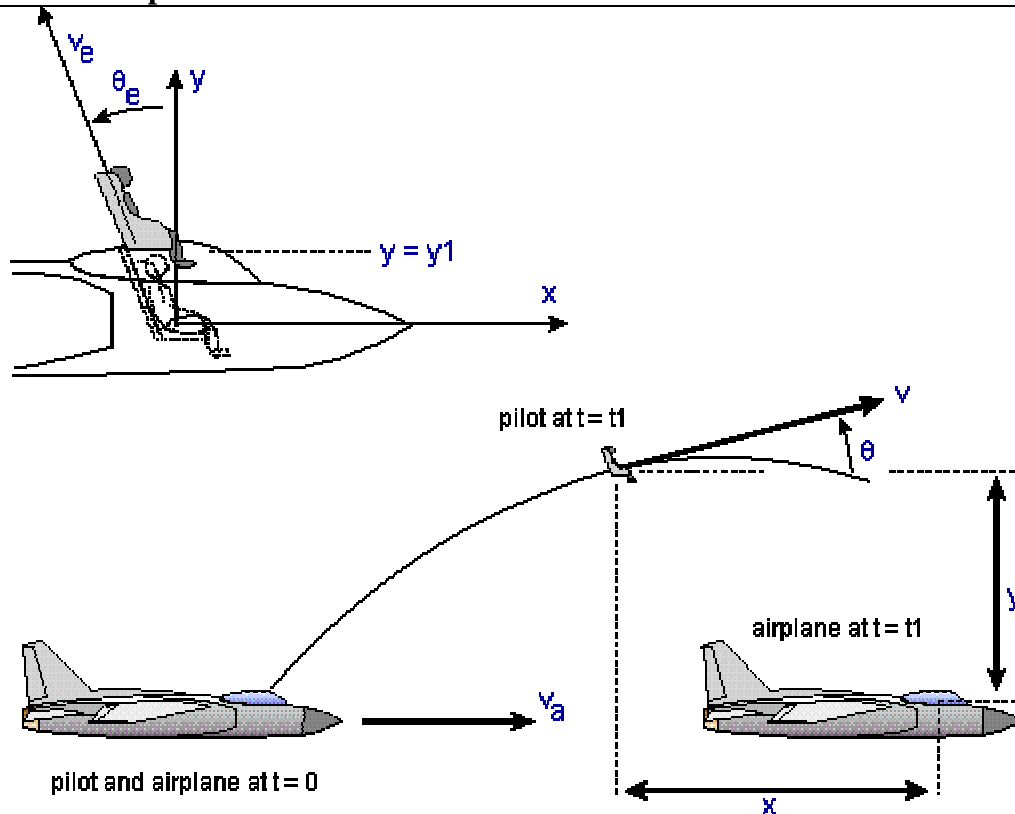


1. Katapultowanie pilota z samolotu



Równania różniczkowe opisujące ruch fotela z pilotem:

$$\frac{dx}{dt} = v \cdot \cos(\theta) - v_a$$

$$\frac{dy}{dt} = v \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad 0 < y < y_1$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{D}{m} - g \cdot \sin(\theta) \quad y > y_1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad 0 < y < y_1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cdot \cos(\theta)}{v} \quad y > y_1$$

$$D = 0.5 \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot v^2$$

gdzie D - siłą ciągu, C_d - współczynnik aerodynamiczny ciągu, m - masa pilota i fotela, g - przys. ziemskie, ρ - gęstość powietrza, A - efektywna powierzchnia pola przekroju pilota i fotela.

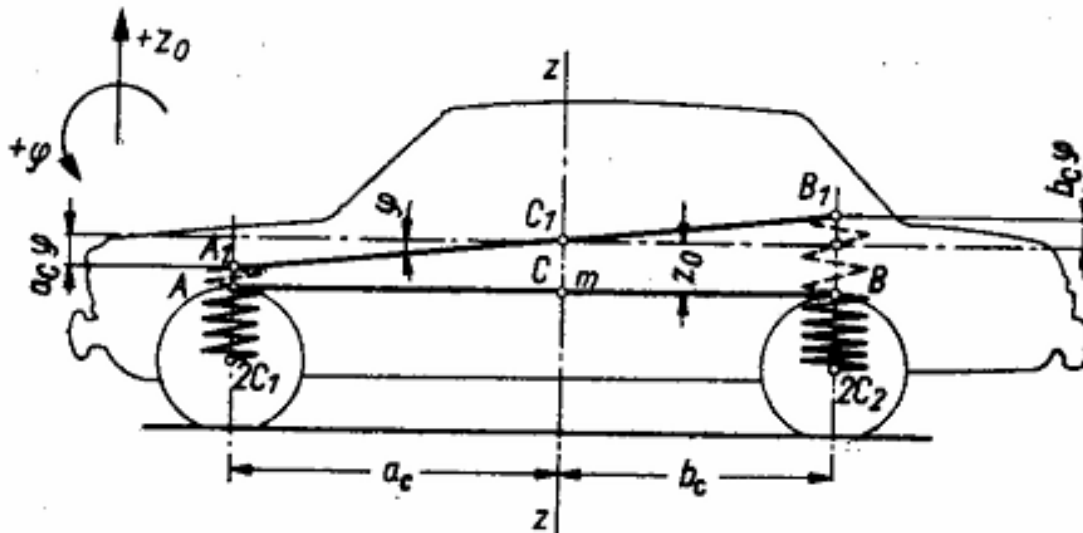
Prędkość początkowa $v(0)$ i kąt $\theta(0)$ są równe:

$$v(0) = \sqrt{(v_a - v_e \cdot \sin(\theta_e))^2 + (v_e \cdot \cos(\theta_e))^2}$$

$$\theta(0) = \text{atan2}(v_e \cdot \cos(\theta_e), v_a - v_e \cdot \sin(\theta_e))$$

Można przyjąć: $v_a = 50 \text{ m/s} \div 300 \text{ m/s}$; $g = 9.81$; $\rho = 1.29$; $C_d = 1$; $A = 1$; $m = 125$; $v_e = 14$;
 $y_1 = 1.25$; $v_a = 300$; $\theta_e = 15$;

2. Kołysanie wzdłużne samochodu



Równania różniczkowe opisujące ruch kadłuba mają postać:

$$\ddot{z}_0 + \omega_z^2 z_0 + k_1 \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi + k_2 z_0 = 0$$

przy czym

$$\omega_z^2 = \frac{2(c_1 + c_2)}{m}$$

częstość drgań cząstkowych stanowiących drgania swobodne kadłuba, w przypadku gdyby mógł on wykonywać tylko liniowe drgania pionowe;

$$\omega_\varphi^2 = \frac{2(c_1 b_c + c_2 a_c)}{m \zeta_y^2}$$

częstość drgań cząstkowych stanowiących drgania kadłuba, w

przypadku gdyby mógł on wykonywać tylko drgania kątowe wokół nieruchomej osi y - y;

$$k_1 = \frac{2(c_2 b_c - c_1 a_c)}{m}$$

współczynniki sprzężenia drgań cząstkowych wyrażające wpływ sił

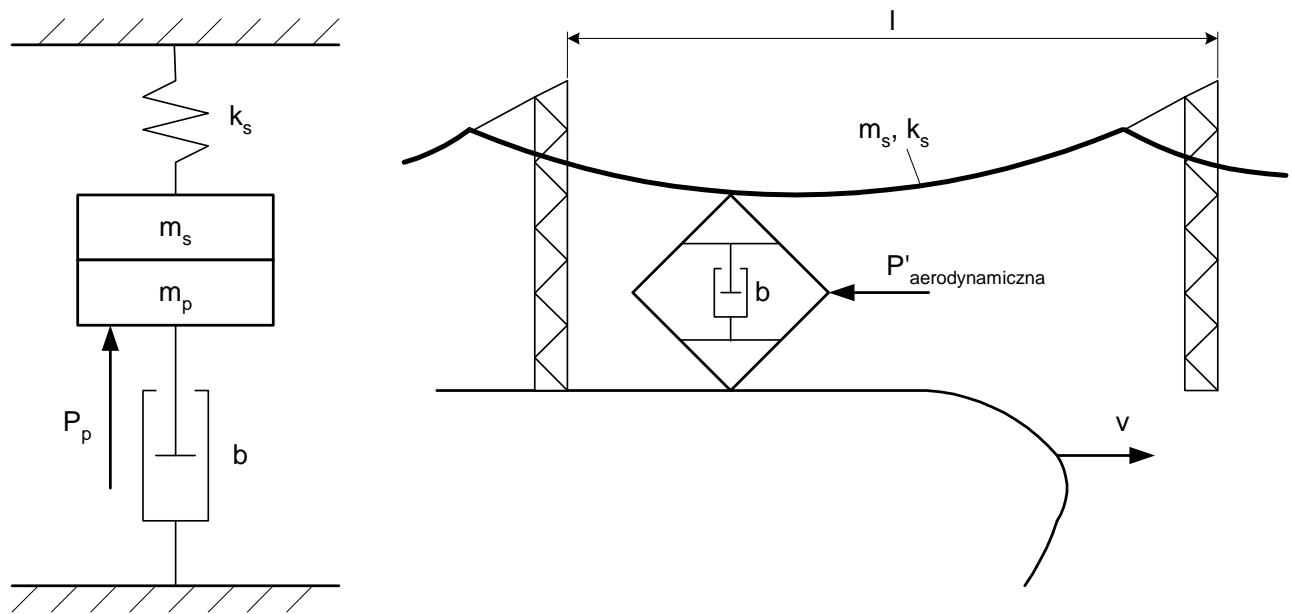
$$k_2 = \frac{2(c_2 b_c - c_1 a_c)}{m \zeta_y^2}$$

bezwładności układu na wzajemne oddziaływanie przedniego i tylnego zawieszenia samochodu.

Można przyjąć (dane techniczne Polski Fiat 125p):

- sztywność zawieszenia przedniego: $2 \cdot c_1 = 36500 \text{ N/m}$
- sztywność zawieszenia tylnego: $2 \cdot c_2 = 42200 \text{ N/m}$
- odległość przedniej osi do środka ciężkości: $a_c = 1,326 \text{ m}$
- odległość tylnej osi od środka ciężkości: $b_c = 1,179 \text{ m}$
- masa samochodu z 4 osobami: $m = 1300 \text{ kg}$
- samochód porusza się z prędkością około 60 km/h

3. Mechanizm pantografu



Równania różniczkowe opisujące układ pantografu z linią trakcji:

$$m_s y'' + k_s y = P_k$$

$$m_p y'' + b y' = P_p - P_k$$

skąd

$$y'' = \frac{1}{m_s + m_0} (P_p - b y' + k_s(t) y)$$

gdzie P_k – siła styku, P_p – siła docisku pantografu

Można przyjąć:

$m_p = 32$ kg - masa pantografu

$m_s = 130$ kg – masa trakcji;

$P_{st} = 80$ N – siła styku między m_p i m_s ;

$b = 0 \div 400$ kg/s – tłumienie pantografu;

$P_p = P_{st} + P_{aerodyn} = 155,5$ N - siła docisku pantografu;

$P_{aerodyn} = c_x v^2$ – siła pochodząca od oporu aerodynamicznego pantografu

$c_x = 0.036$ – wsp. oporu aerodynamicznego

$v = 166,1$ km/h = 46.1 m/s – prędkość lokomotywy;

$k_s(t) = k_0 - k_1 \cos(\omega t)$ – zmienny wsp. sprężystości przewodów trakcji;

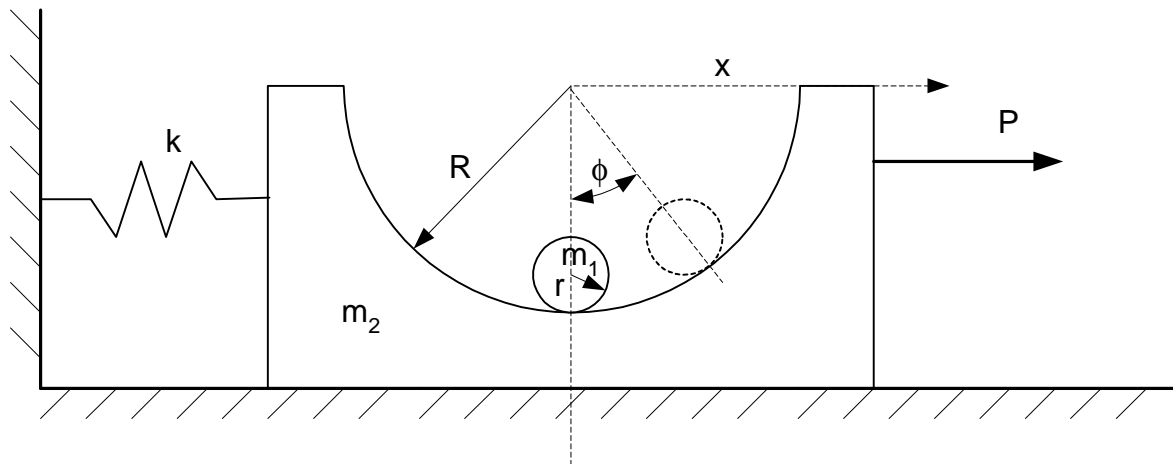
$k_0 = 3720$ N; $k_1 = 800$ N;

$l = 70$ m – rozstawienie słupów trakcji

$\omega = 2\pi v/l = 4,14$ s⁻¹

$y_0 = P_p / (k_0 - k_1) = 0,054$ m – położenie początkowe pantografu;

4. Układ korytka z kulką w środku



Równania różniczkowe:

$$(m_1 + m_2) x'' + m_1 \phi'' (R - r) - m_1 \phi'^2 (R - r) \phi + k x = P$$

$$m_1 x'' (R - r) + m_1 [(R - r)^2 + 0.5 r^2] \phi'' + m_1 g (R - r) \phi = 0$$

po przekształceniu

$$x'' = \frac{1}{m_1 + m_2} [P - m_1 \phi'' (R - r) + m_1 \phi'^2 (R - r) \phi - k x]$$

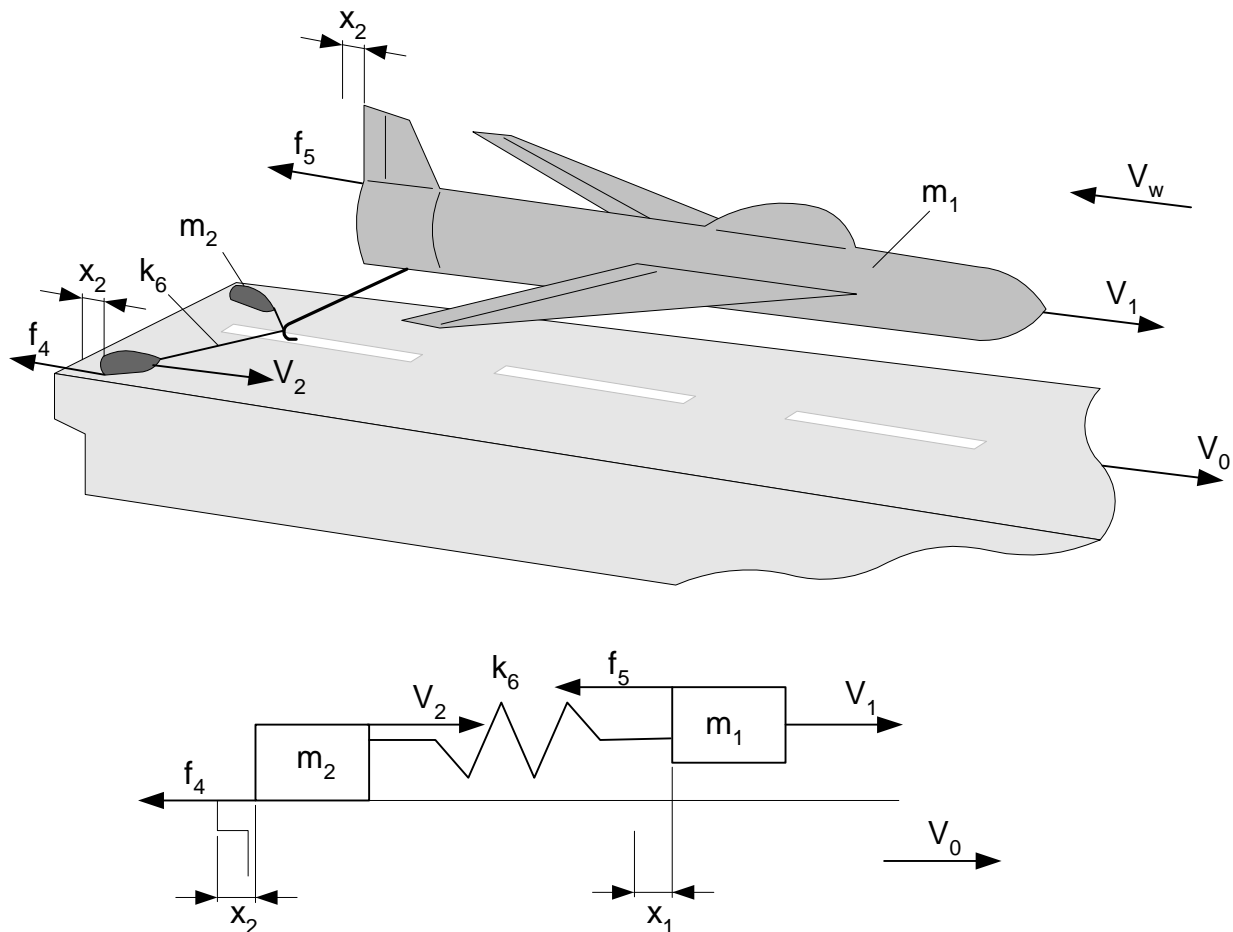
$$\phi'' = \frac{1}{m_1 [(R - r)^2 + r^2/2]} [-m_1 x'' (R - r) - m_1 g (R - r) \phi]$$

gdzie x – położenie korytka; ϕ - wychylenie kulki w korytku

Można przyjąć:

- $m_1 = 0,5$ kg - masa kulki;
- $m_2 = 5$ kg – masa korytka;
- $R = 0,12$ m promień korytka;
- $r = 0,02$ m – promień kulki;
- $k = 4000$ N/m – współczynnik sprężystości sprężyny.

5. Samolot lądujący na lotniskowcu



Dobrać tak parametry i warunki początkowe równania ruchu danego układu, aby proces lądowania samolotu (gdy ciało o masie m_1 ulega połączeniu z ciałem o masie m_2 za pomocą linki mającej pewną sprężystość k_6) przebiegło jak najłagodniej.

Układ opisują równania ruchu:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + b_5 (x_1' + V_0 + V_w)^2 + k_6 (x_1 - x_2) &= 0 & x_2 < x_1 \\ m_2 x_2'' + f_4 \operatorname{sgn} x_2' - k_6 (x_1 - x_2) &= 0 & x_2 < x_1 \end{aligned}$$

po przekształceniu

$$\begin{aligned} x_1'' &= [-b_5 (x_1' + V_0 + V_w)^2 - k_6 (x_1 - x_2)] / m_1 & x_2 < x_1 \\ x_2'' &= [-f_4 \operatorname{sgn} x_2' + k_6 (x_1 - x_2)] / m_2 & x_2 < x_1 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_4 \operatorname{sgn} x_2' &= f_4, \\ b_5 (x_1' + V_0 + V_w)^2 &= f_5 \end{aligned}$$

Można przyjąć:

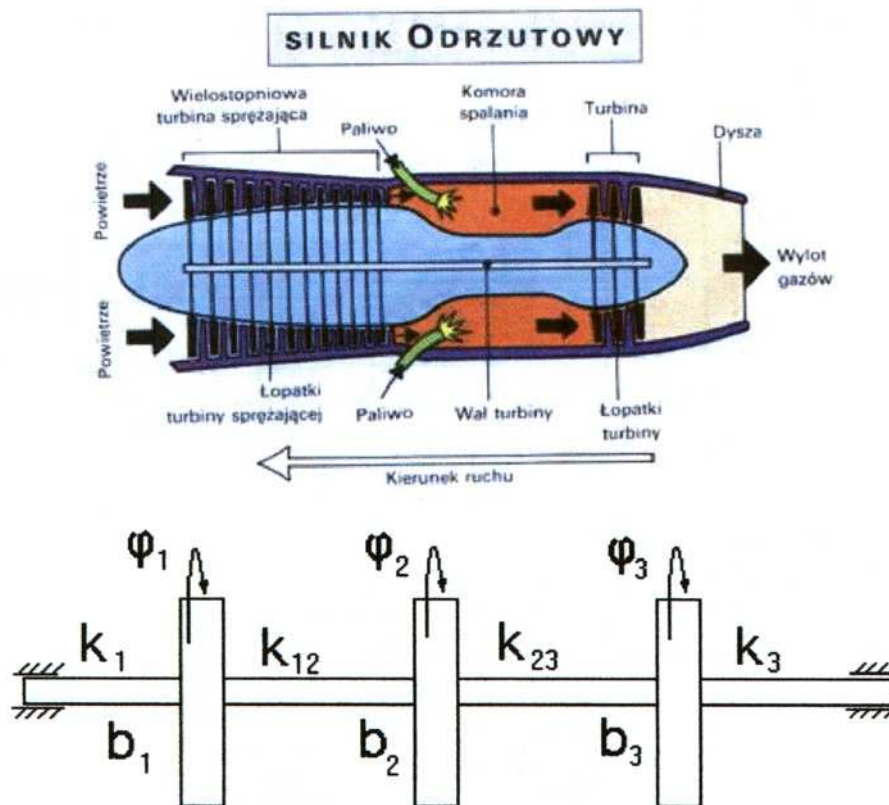
$$m_1 = 250 \text{ kg}; m_2 = 300 \text{ kg};$$

$V_0 = 10 \text{ m/s}$ – prędkość statku; $V_1 = 30 \text{ m/s}$ – prędkość samolotu; V_2 – prędkość worków z obciążeniem; $V_w = 30 \text{ m/s}$ – prędkość wiatru;

$k_6 = 15$ – sztywność linki o którą zahacza lądujący samolot; $f_4 = 8$ - tarcie suche; $f_5 = 0.25$ - tarcie mas powietrza o poszycie samolotu.

x_2 – przemieszczenie worków z piaskiem; x_1 - przemieszczenie samolotu po zahaczeniu o linkę;

6. Dynamika trzystopniowej sprężarki silnika przepływowego odrzutowego



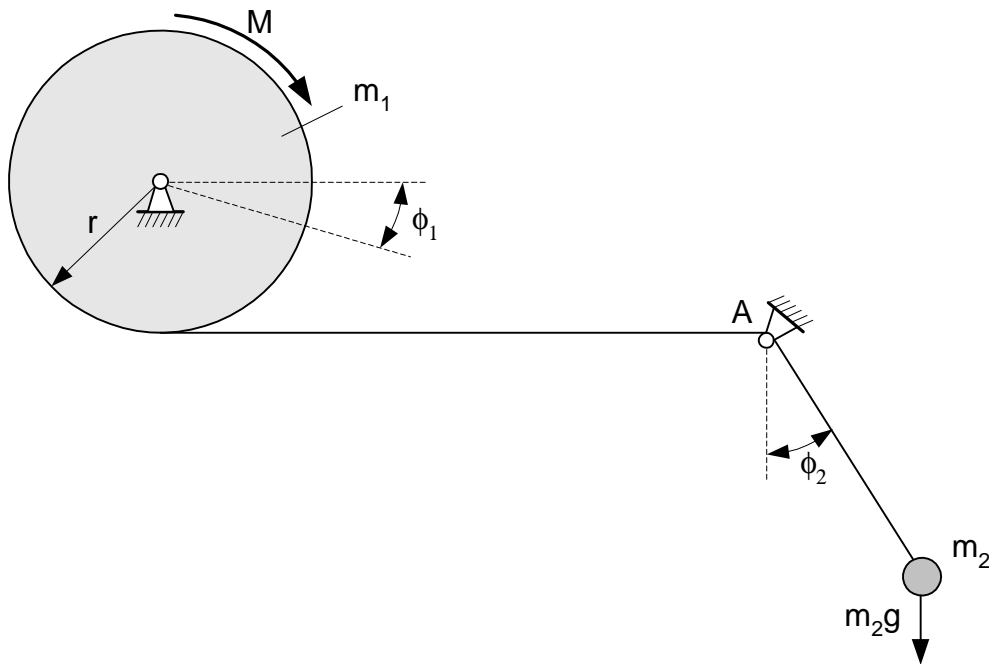
Uproszczony model turbiny sprężającej może stanowić układ trzech tarcz kołowych o momentach bezwładności I_1, I_2 i I_3 oraz współczynnikach tłumienia ruchu obrotowego b_1, b_2 i b_3 , osadzonych na wale o współczynnikach sprężystości kolejno równych k_1, k_{12}, k_{23} i k_3 .

Dynamikę układu opisują następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} I_1 \phi''_1 + b_1 \phi'_1 - k_{12} (\phi_2 - \phi_1) &= 0 \\ k_{12} (\phi_2 - \phi_1) + I_2 \phi''_2 + b_2 \phi'_2 - k_{23} (\phi_3 - \phi_2) &= 0 \\ k_{23} (\phi_3 - \phi_2) + I_3 \phi''_3 + b_3 \phi'_3 - k_3 \phi_3 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie I_i, k_i, b_i są nieujemne.

7. Nawijanie nici wahadła



Moment obrotowy M powoduje obrót koła o promieniu r o kąt ϕ_1 . Ruch ten powoduje zmianę długości nici poprowadzonej przez biegun w punkcie A i połączonej z masą m_2 . Na masę m_2 działa siła grawitacji, porusza się ona ruchem wahadłowym względem bieguna A zmieniając o kąt ϕ_2 położenie odcinka $|Am_2|$ względem osi pionowej.

Wyprowadzenie równań różniczkowych:

Długość nici $|Am_2|$ zmienia się:

$$|Am_2| = l_0 - r \phi_1$$

Energia kinetyczna w układzie wynosi:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [r^2 \dot{\phi}_1^2 + (l_0 + r \phi_1)^2 \dot{\phi}_2^2]$$

Energia potencjalna wynosi:

$$U = -m_2 g (l_0 - r \phi_1) \cos \phi_2$$

Następnie stosujemy równania Lagrange'a w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\delta L}{\delta \phi_1} = M$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\delta L}{\delta \phi_2} = 0$$

gdzie $L = E - U$

Równania różniczkowe opisujące układ:

$$(1/2 m_1 + m_2) r^2 \phi_1'' + m_2 (l_0 - r \phi_1) r \phi_2'^2 + m_2 g r \cos \phi_2 = M$$

$$(l_0 - r \phi_1) \phi_2'' - r \phi_1' \phi_2' + g \sin \phi_2 = 0$$

Można podstawić: $l_0 = 1 \text{ m}$; $r = 0.3 \text{ m}$; $m_1 = 10 \text{ kg}$; $m_2 = 1 \text{ kg}$; $M = 6 \text{ Nm}$